458. 寫像函數ヲ作ルーツノ簡單ナ例題

黒 田 稲 夫（山形）

鳥海登山ヲ了ヘテ足䏻メト銷夏カタガタ次ノヨウナイタヅラヲシテミマシタ。初期學生ノ方々ガ函數論演習ノ際ノ一題材トモナラバ幸堪デアリマス。

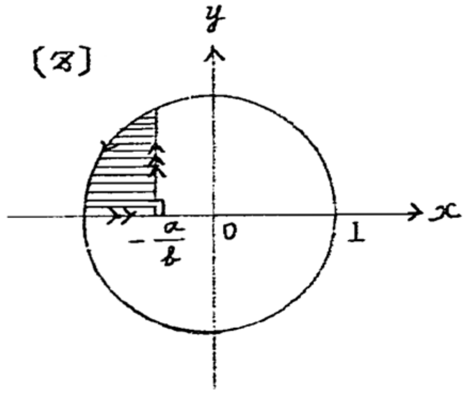
先ヅ w 平面上ノ蝸牛形 $\rho=a+b\cos\theta$, $a>0$, $b>0$ ヲ考ヘマスト

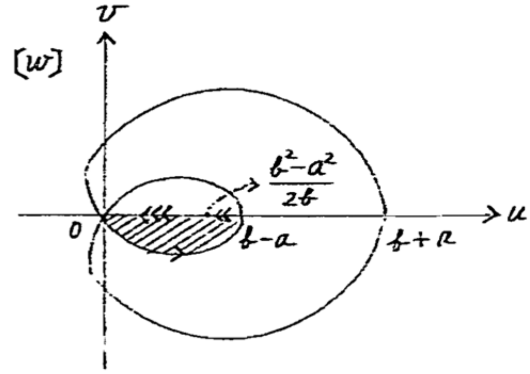
$$w=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\frac{b}{2}+a(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$+\frac{b}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)^2$$

ト書クコトガ出來マス。ソレ故今

$$(1)\quad w=\frac{b}{2}+az+\frac{b}{2}z^2=f(z)$$

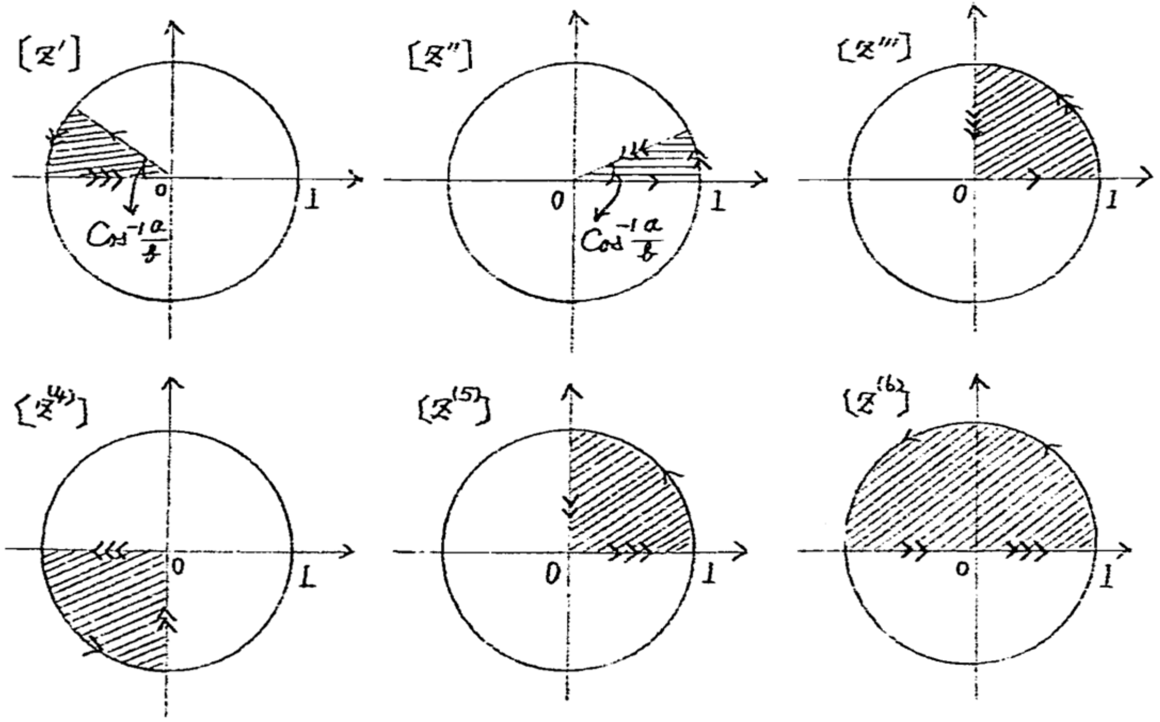
ヲ作ッテミマスト点 z ガ z 平面上ノ單位円ヲ画クトキ此ノ關係ニヨッテ点 w ハ w 平面上ノ上記ノ蝸牛形ヲ画キマス。ソコデ (i) $a\geqq 2b$, (ii) $b<a<2b$, (iii) $a=b$ ナル場合ニツイテ考ヘマスト $f'(z)=a+bz$ デアッテ單位円 $|z|=1$ ノ内部デハ $f'(z)\neq 0$ デアリマスカラ (1) ハ z 平面ノ單位円ノ内部ヲ w 平面ノ蝸牛形ノ内部ヘ一對一ニ且ッ等角ニ寫像シマス。(iv) $b>a$ ノ場合ハ一寸厄介デスガ併シ(1)ニヨッテ次ノ寫像ガ得ラレルコトハスグニ分リマス。

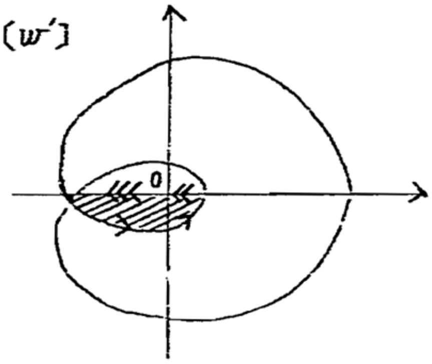


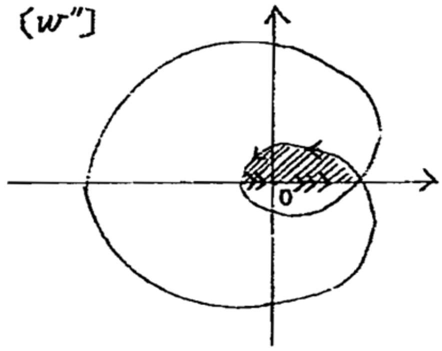


ソコデ z 平面及ビ w 平面ノ指摘セラレタ面分ヲ次ノヨウニ等角写像ニヨッテ漸次変形シテ行キマス。

$$
(2)\begin{cases}
z' = \dfrac{z-\left(-\frac{a}{b}+i\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right)}{z+\left(\frac{a}{b}+i\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}\right)}, \quad z'' = e^{-i\cos^{-1}\left(-\frac{a}{b}\right)}\cdot z', \\[2ex]
z''' = (z'')^{2\,\frac{\pi}{\cos^{-1}\frac{a}{b}}}, \quad z^{(4)} = \dfrac{z'''-i}{z'''+i}, \quad z^{(5)} = -z^{(4)}, \\[2ex]
z^{(6)} = (z^{(5)})^2, \quad w' = w - \dfrac{b^2-a^2}{2b}, \quad w'' = -w'
\end{cases}
$$







(1) 及ビ (2) カラ $\zeta^{(6)}$ ト w'' トノ関係ヲ求メマスト

$$w''=-\frac{a^2}{2b}+\frac{a}{b}\,\frac{(a+i\sqrt{b^2-a^2})\left(\frac{1-\sqrt{\zeta^{(6)}}}{1+\sqrt{\zeta^{(6)}}}\right)^{\frac{2\,\mathrm{Cos}^{-1}\frac{a}{b}}{\pi}}+a-i\sqrt{b^2-a^2}}{1+\left(\frac{1-\sqrt{\zeta^{(6)}}}{1+\sqrt{\zeta^{(6)}}}\right)^{\frac{2\,\mathrm{Cos}^{-1}\frac{a}{b}}{\pi}}}$$

$$-\frac{1}{2b}\left\{\frac{(a+i\sqrt{b^2-a^2})\left(\frac{1-\sqrt{\zeta^{(6)}}}{1+\sqrt{\zeta^{(6)}}}\right)^{\frac{2\,\mathrm{Cos}^{-1}\frac{a}{b}}{\pi}}+a-i\sqrt{b^2-a^2}}{1+\left(\frac{1-\sqrt{\zeta^{(6)}}}{1+\sqrt{\zeta^{(6)}}}\right)^{\frac{2\,\mathrm{Cos}^{-1}\frac{a}{b}}{\pi}}}\right\}^2$$

トナリマス。今 $\zeta^{(6)}$, w'' ノ代リニ改メテ ζ, w ト書キ

$$\left(\frac{1-\sqrt{\zeta}}{1+\sqrt{\zeta}}\right)^{\frac{2\,\mathrm{Cos}^{-1}\frac{a}{b}}{\pi}}=t \text{ ト置クト}$$

$$t^2\left(w-\frac{b^2-a^2}{2b}\right)+t\left(2w+\frac{b^2-a^2}{b}\right)+w-\frac{b^2-a^2}{2b}=0$$

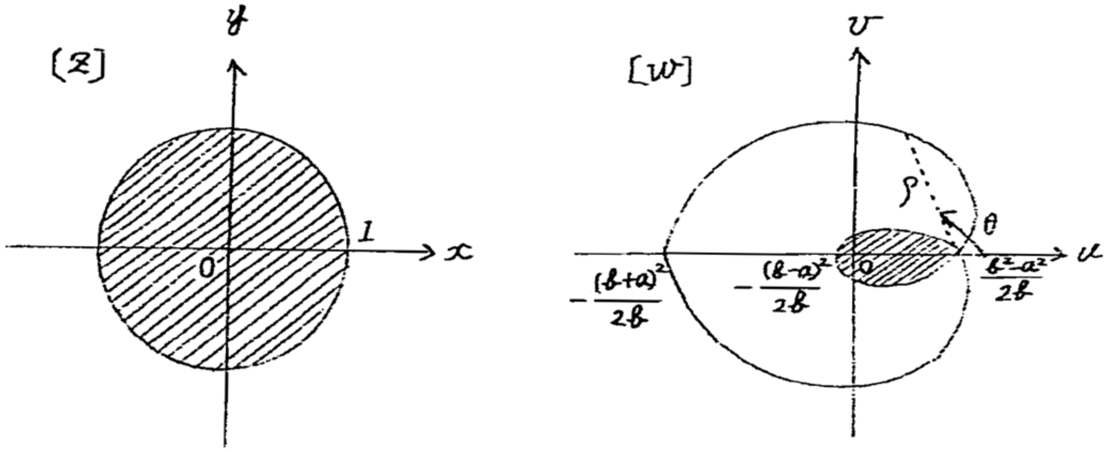
トナリコレヲ t ニツイテ解キマスト

$$t=\frac{\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2b}}-\sqrt{w}}{\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2b}}+\sqrt{w}}$$

ガ得ラレマス。従ッテ

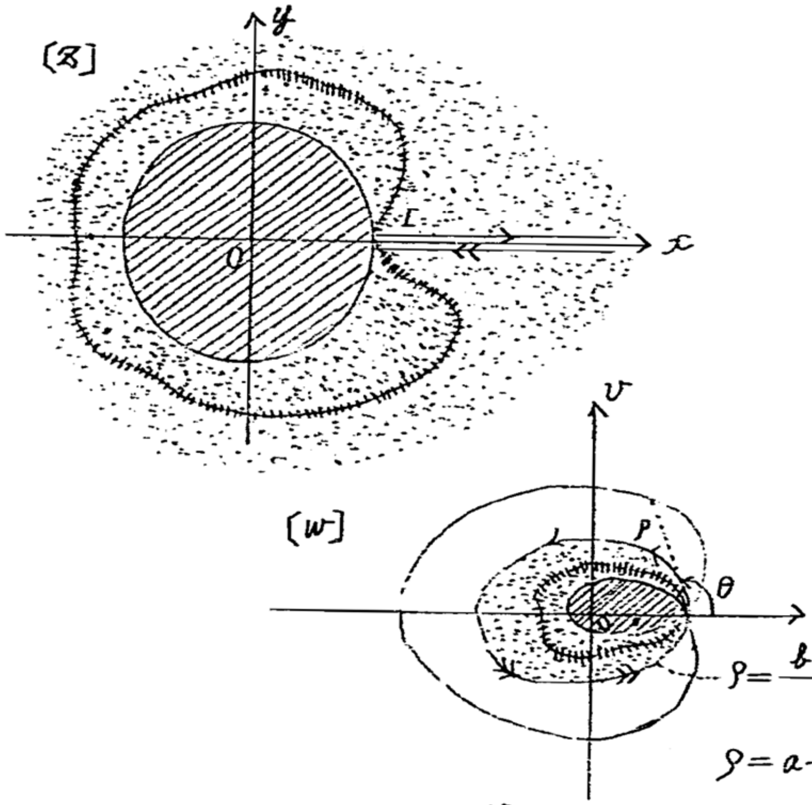
(3) $$\frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}=\left(\frac{\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2b}}-\sqrt{w}}{\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2b}}-\sqrt{w}}\right)^{\frac{\pi}{2\cos^{-1}\frac{a}{b}}}$$

ニヨッテ次ノ寫像ガ得ラレマス。



$\rho=a-b\cos\theta,\ b>a>0$

尚 a, b ノ値ヲ $2a \geqq b > a > 0$ ノ如ク制限シマスト (1), (2), (3) カラ容易ニ次ノ寫像ガ得ラレマス。



$$\rho=\frac{b(b^2-2a^2)}{4a^2}-\frac{b^3}{4a^2}\cos\theta$$

$$\rho=a-b\cos\theta$$

即チ實軸ニ沿ヒ $z=1$ ヨリ $z=\infty$ マデ切断セラレタ z 平面ハ w 平面ノ蝸牛形 $\rho=a-b\cos\theta$ ノ内輪線ノ囲ム面分ヲ含ミ其ノ外輪線ノ囲ム面分内ニアル一面分即チ蝸牛形

$$\rho=\frac{b(b^2-2a^2)}{4a^2}-\frac{b^3}{4a^2}\cos\theta$$

ノ一ツノ輪線ノ囲ム面分ニ寫像セラレマス。更ニ簡單ナ計算デスグ分ルヨウニ w 平面ニ於テ原点カラ蝸牛形 $\rho=a-b\cos\theta$ ノ任意ノ一点ニ至ル距離ヲ d トシマスト

$$\frac{(b-a)^2}{2b}\leqq d\leqq\frac{(b+a)^2}{2b}$$

デアリマス。ソレ故上記ノ切断セラレタ z 平面ノ面分 $|z|<1$ ヲ含ム任意ノ單一連結デ單葉ナ面分（$z=1$ ハ其ノ周点）ハ w 平面ノ $|w|<\frac{(b-a)^2}{2b}$ ヲ含ム同種ノ面分ニ寫像セラレマス。従ッテ又 $w=\frac{(b+a)^2}{2b}W$ ヲ考ヘマストコレト(3)カラ得ラレル関係

$$(4)\quad \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}=\left(\frac{\sqrt{\dfrac{b-a}{b+a}}-\sqrt{W}}{\sqrt{\dfrac{b-a}{b+a}}+\sqrt{W}}\right)^{\frac{\pi}{2\operatorname{Cos}^{-1}\frac{a}{b}}},\qquad 2a\geqq b>a>0$$

ニヨッテ z 平面ノ上記ノ面分ハ W 平面ノ單位円内ノ同種ノ面分ニ寫像セラレ而モコレハ常ニ其ノ内部ニ面分

$$(5)\quad |W|<\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2$$

ヲ含ムコトガ分リマス。

特ニ $b=\sqrt{2}a$ ナラバ w 平面ノ蝸牛形 $\rho=\frac{b(b^2-2a^2)}{4a^2}-\frac{b^3}{4a^2}\cos\theta$ ハ円 $|w|=\frac{\sqrt{2}}{4}a$ トナリ蝸牛形 $\rho=a-\sqrt{2}a\cos\theta$ ノ外輪線ハコノ円ニ関シテ内輪線ノ鏡像トナリ従ッテ上記切断セラレタ z 平面ノ代リニ二葉面ヲ考ヘテ行クコトニナリマスカラ、コノコトカラ直チニ Carathéodory, Conformal representation P. 36 ニ記載ノ Koebe ノ定理が得ラレマス。即チ此ノ場合(4), (5) ハ夫々

$$z=\frac{(1+\sqrt{2})^2 W}{\{1+(1+\sqrt{2})^2 W\}^2}, \quad |W|<\frac{1}{(1+\sqrt{2})^4}$$

トナリマス。